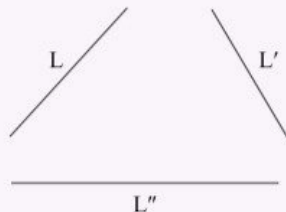


آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : هندسه	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۹ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		
	نمره		

هندسه

۱ سه خط دوجه دو ناموازی L ، L' و L'' در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی L و L' موازی L'' باشد. (روش رسم با کمک تبدیل هندسی مناسب را کامل توضیح دهید.)



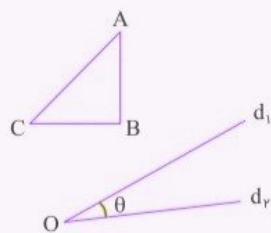
۲ سه دایره هم مرکز، مفروض اند. مثلث متساوی الاضلاعی رسم کنید که هر رأس آن روی یکی از این دایره ها باشد.

۳ در دایره به شعاع R ، دو وتر AB و CD در نقطه P بر هم عمودند.

ثابت کنید: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$

۴

در شکل زیر، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث $\triangle ABC$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



الف نشان دهید $\angle AOA'' = 2\theta$

ب

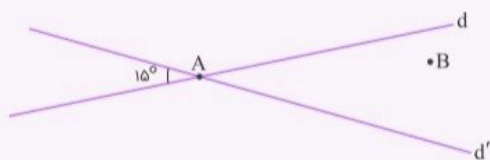
با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر $\triangle ABC$ دانست؟

۵ مماس‌مشتک‌های داخلی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ برهم عمودند. طول خط‌المركزین دو دایره را بر حسب R و R' بیابید.

۶ نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d ، نقطه A' می‌نامیم. اگر نقطه A را حول نقطه A' به اندازه 120° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم تا نقطه A'' حاصل شود، طول AA'' چقدر است؟

۷ قطر AA' از دایره محیطی مثلث ABC ، ضلع BC را در D قطع کرده است. از D عمودهای DE و DF را بر AB و AC رسم می‌کنیم. ثابت کنید $EF \parallel BC$.

۸ دو خط d و d' در نقطه A متقاطع‌اند و باهم زاویه 15° می‌سازند. نقطه B به فاصله ۳ از نقطه A ، روی هیچ‌کدام از دو خط d و d' قرار ندارد. قرینه B نسبت به دو خط d و d' را به ترتیب C و D می‌نامیم. مساحت مثلث ACD را حساب کنید.



۹ مربعی به ضلع ۲ را حول مرکز تقارنش 45° دوران داده‌ایم. مساحت ناحیه مشترک بین مربع و دوران‌یافته‌اش را حساب کنید.

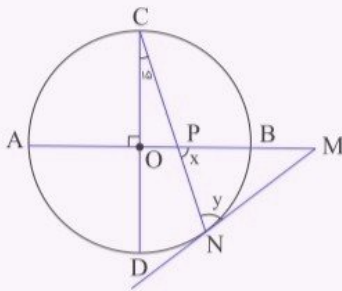
۱۰ دو دایره در نقطه A مماس خارج‌اند. وتر AB را در دایره اول و وتر AB' را در دایره دوم، عمود بر AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید امتداد BB' همواره از نقطه ثابتی می‌گذرد.

دایره $(O, 2)$ را با بردار \vec{v} به طول ۲ انتقال داده‌ایم. مساحت ناحیه مشترک بین تصویر و شکل اول را حساب کنید.

۱۱

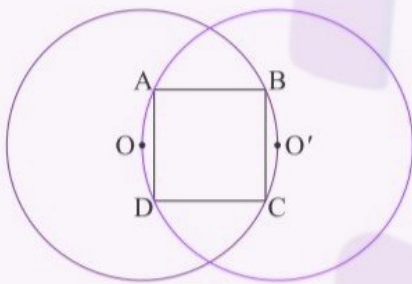
در شکل زیر دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر MN بر دایره مماس باشد و $\angle OCP = 15^\circ$ ، اندازه زوایای x ، y و M را حساب کنید.

۱۲



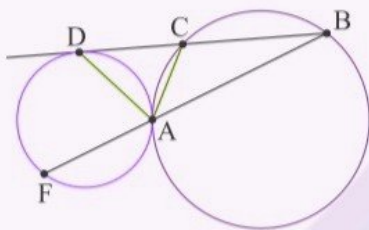
در شکل زیر، دایره‌ها از مرکز یک‌دیگر گذشته و $ABCD$ مربع است. طول ضلع مربع را برحسب شعاع دایره‌ها بیابید.

۱۳



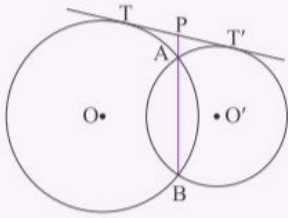
در شکل زیر، دایره‌ها مماس خارج‌اند و BD بر دایره کوچک‌تر مماس است. ثابت کنید AD نیمساز $\angle CAF$ است.

۱۴



۱۵

مطابق شکل دو دایره به مراکز O و O' و به طول خط‌المركزین ۱۶ مفروض‌اند و می‌دانیم امتداد وتر مشترک AB ، مماس مشترک TT' را در نقطه P قطع می‌کند. اگر مساحت چهار ضلعی $AOBO'$ برابر با ۷۲ و طول TT' برابر با ۱۲ باشد، طول PA را محاسبه کنید.

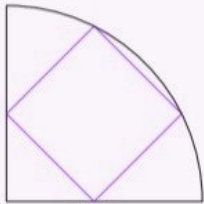


۱۶

نقطه M درون دایره $C(O, R)$ و به فاصله d از مرکز آن، قرار دارد ($d > 0$). وتری به طول L گذرنده از M رسم کنید ($0 < L \leq 2R$).

۱۷

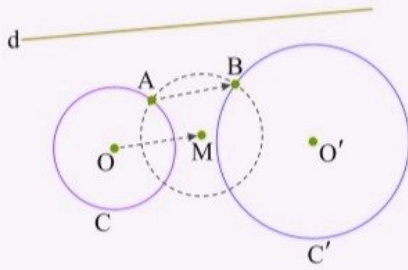
در شکل زیر، یک مربع درون ربع دایره به شعاع R قرار دارد. طول ضلع مربع را بیابید.



۱۸

از نقطه P خارج از دایره به شعاع ۵ قاطعی رسم کرده‌ایم تا دایره را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند. اگر $PA - AB = 2$ و فاصله P تا نزدیک‌ترین نقطه دایره برابر ۸ باشد، طول وتر AB را به دست آورید.

دو دایره C و C' و خط d مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول l طوری رسم کنید که موازی d باشد و ابتدای آن روی C و انتهای آن روی C' باشد.



۱- دو دایره در نقطه A مماس داخل‌اند. از نقطه C روی دایره کوچک‌تر، مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا دایره بزرگ‌تر را در B و D قطع کند. ثابت کنید AC نیمساز زاویه BAD است.

۲- دو دایره در نقطه A مماس داخل‌اند و وتر BC از دایره بزرگ‌تر، در نقطه D بر دایره کوچک‌تر، مماس است. ثابت کنید AD نیمساز BAC است.

۲۱ در مثلث ABC نیمسازهای داخلی AD و BE در I متقاطع‌اند. اگر نقاط I, D, C و E روی یک دایره قرار گیرند و $DE = k$ ، اندازه اضلاع و زاویه‌های مثلث IDE را بیابید. ($k > 0$)

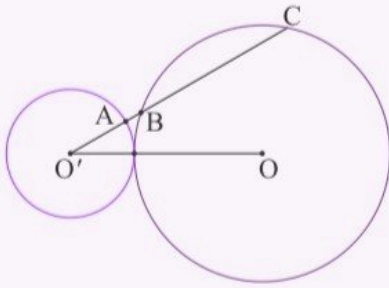
۲۲ سه خط مماس بر دایره محاطی مثلث ABC و موازی با اضلاع آن رسم می‌کنیم تا سه مثلث در گوشه‌های مثلث ABC تشکیل شوند. ثابت کنید مجموع محیط‌های این سه مثلث برابر است با محیط مثلث ABC.

۲۳ دو دایره در نقطه A مماس داخل‌اند. AB قطر دایره بزرگ‌تر است و وتر BD از دایره بزرگ‌تر، در نقطه K بر دایره کوچک‌تر مماس است. ثابت کنید AK نیمساز زاویه DAB است.

۲۴ دوزنقه ABCD ($AB \parallel DC$, $AB > DC$) در یک دایره، محاط است و $\hat{A} = 45^\circ$. ثابت کنید طول قاعده کوچک دوزنقه، دو برابر فاصله مرکز دایره از قاعده بزرگ است.

۲۵

در شکل زیر، دو دایره به مرکزهای O و O' و شعاعهای R و $\frac{1}{p}R$ ، مماس خارج‌اند. اگر $\angle CO'O = 30^\circ$ ، طول AB را بر حسب R بیابید.



۲۶

طول یک مستطیل سه برابر عرض آن است. از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی این مستطیل، یک چهار ضلعی پدید می‌آید. نسبت مساحت دایره محیطی این چهارضلعی به مساحت مستطیل را محاسبه کنید.

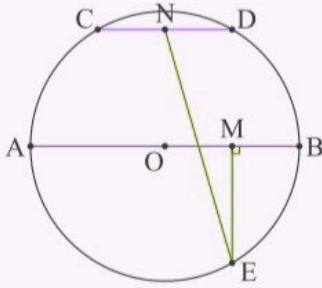
۲۷

قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$ در نقطه H بر هم عمودند و M وسط CD است. ثابت کنید امتداد MH بر AB عمود است.

۲۸

قضیه: ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند و به‌عکس.

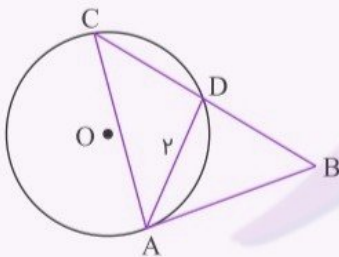
در شکل زیر، وتر CD با قطر AB از دایره به مرکز O موازی است و طول آن برابر شعاع دایره است. اگر N وسط CD و M وسط OB باشد، ثابت کنید NE و OM یکدیگر را نصف می‌کنند.



دو دایره ناهم‌نهشت، در نقطه A مماس‌خارج‌اند. از A دو قاطع BAB' و CAC' را رسم می‌کنیم (B و C روی یک دایره‌اند). ثابت کنید $BC \parallel B'C'$.

نسبت مساحت هشت‌ضلعی منتظم محیط بر یک دایره، بر هشت‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره را محاسبه کنید.

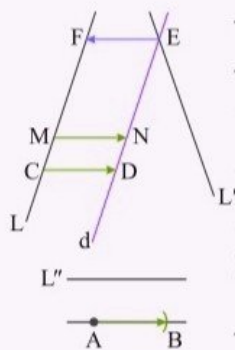
در شکل زیر نقطه D وسط ضلع BC است. اگر AB بر دایره مماس باشد و $AD = ۲$ باشد، طول AC را حساب کنید.



آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : هندسه	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۹ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		
نمره			

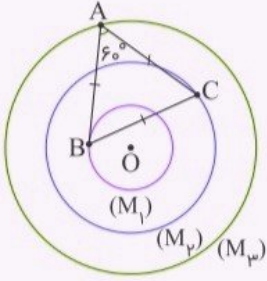
هندسه

۱

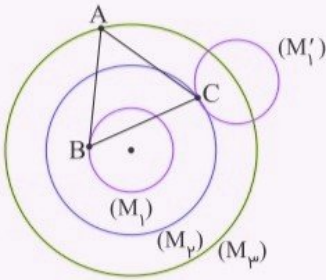


برای حل سؤال ابتدا بردار \overrightarrow{AB} را به طول ۵ سانتی‌متر موازی با خط L'' رسم می‌کنیم. (برای این منظور کافی است از یک نقطه دلخواه مانند A خطی موازی خط L'' رسم کنیم و کمائی به اندازه ۵ سانتی‌متر به مرکز A بزنیم، محل برخورد این کمان با خط رسم شده را نقطه B می‌نامیم. بردار \overrightarrow{AB} بردار مطلوب است) حال خط را با بردار \overrightarrow{AB} انتقال می‌دهیم و خط حاصل را d می‌نامیم. (برای این منظور کافی است از دو نقطه دلخواه و متمایز از خط L دو بردار مساوی با بردار \overrightarrow{AB} رسم کنیم و نقاط انتهایی بردارها را به هم وصل کنیم). از آنجا که انتقال شیب خط را حفظ می‌کند می‌توان گفت دو خط d و L موازی‌اند و با توجه به آن که دو خط L و L' غیرموازی‌اند می‌توان گفت دو خط d و L' نیز غیرموازی‌اند. محل برخورد این دو خط را E می‌نامیم. نقطه E را با بردار \overrightarrow{BA} انتقال می‌دهیم و نقطه حاصل را F می‌نامیم. ابتدا دقت کنید چون خط d انتقال‌یافته خط L با بردار \overrightarrow{AB} است بنابراین خط L انتقال‌یافته خط d با بردار \overrightarrow{BA} محسوب می‌شود. پس نقطه F روی خط L است. همچنین چون $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA}$ است، بنابراین طول پاره‌خط EF ، ۵ سانتی‌متر است و موازی با خط L'' خواهد بود در نتیجه EF همان پاره‌خط مطلوب است.

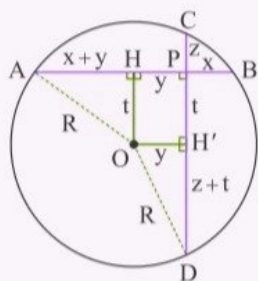
فرض کنیم $\triangle ABC$ ، مثلث موردنظر است. پس نقطه C دوران یافته B حول A با زاویه 60° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بوده و روش رسم، به این صورت است:



دایره M_1 را حول A با زاویه 60° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، دوران می‌دهیم تا دایره M_2 را در C قطع کند. نقطه C را حول A با زاویه 60° در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطه B به دست آید.



از مرکز دایره بر AB و CD عمود می‌کنیم. پس OH و OH' بر این وترها عمودند. فرض کنیم $PB = x$ و $PH = y$. پس $AH = HB = x + y$. به همین ترتیب اگر $PC = z$ و $PH' = t$ ، آنگاه $DH' = H'C = z + t$. ضمناً چون چهارضلعی OHPH' مستطیل است، $OH = t$ و $OH' = y$ حال داریم:



$$\triangle OHA : \text{فیثاغورس} \Rightarrow (x+y)^2 + t^2 = R^2$$

$$\triangle OH'D : \text{فیثاغورس} \Rightarrow (z+t)^2 + y^2 = R^2$$

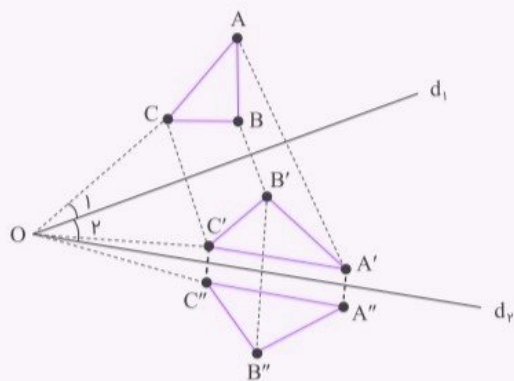
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (x+y)^2 + x^2 + z^2 + (z+t)^2$$

$$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

$$= 2(x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 + 2zt + 2t^2)$$

$$= 2((x+y)^2 + y^2 + (z+t)^2 + t^2)$$

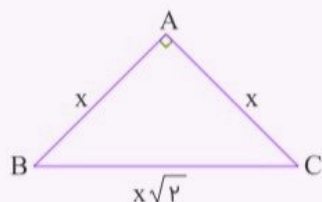
$$= 2\left(\underbrace{(x+y)^2 + t^2}_{R^2} + \underbrace{(z+t)^2 + y^2}_{R^2}\right) = 4R^2$$



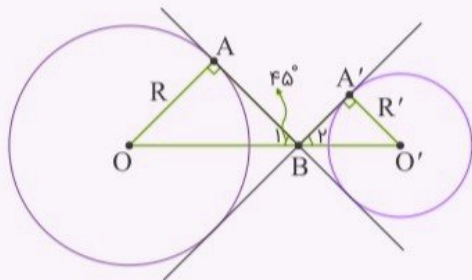
$$\begin{cases} d_1 \perp CC'' \\ \Delta OCC'' \text{ متساوی الساقین} \end{cases} \Rightarrow d_1 \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\begin{aligned} &\hat{O}_3 = \hat{O}_4 : \text{به همین ترتیب} \\ &\Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = \Delta COC'' \\ &\hat{O}_1 + \hat{O}_4 = \theta, \quad \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \theta \\ &\Rightarrow \Delta COC'' = 2\theta \end{aligned}$$

چون $\Delta COC''$ و $\Delta BOB''$ و $\Delta AOA''$ همگی برابر 2θ می باشند نسبت به مرکز O می توان دوران را به کار برد با زاویه 2θ



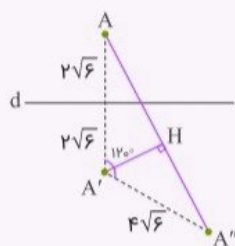
می‌دانیم خط‌المركزين، نیمساز زاویه بین مماس‌مشتک‌ها است. پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$ و مثلث‌های OAB و $O'A'B'$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین‌اند. حال طبق یادآوری فوق، داریم:



$$OB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}R$$

$$O'B = \sqrt{2}O'A' = \sqrt{2}R'$$

$$OO' = OB + O'B = \sqrt{2}(R + R')$$

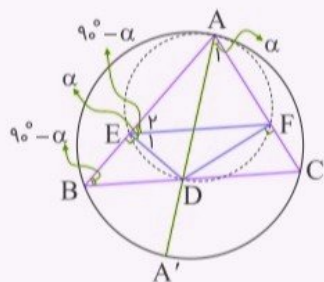


$$AA' = A'A'' = 4\sqrt{6}$$

$$\frac{AA'H}{AH} = \frac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{6}) = 4\sqrt{2}$$

$$AA' = 2AH = 2(4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

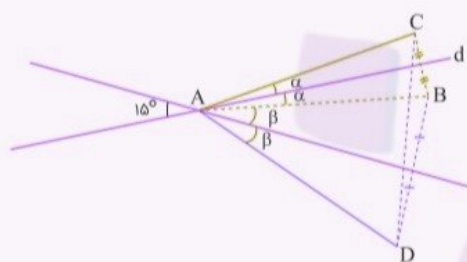
در چهار ضلعی AEDF زاویه‌های E و F مکمل‌اند. پس این چهار ضلعی، محاطی است و با رسم دایرهٔ محیطی آن نتیجه می‌شود $\hat{E}_1 = \hat{A}_1 = \alpha$ و در نتیجه $\hat{E}_2 = 90^\circ - \alpha$. حال در دایرهٔ بزرگ، داریم:



$$\hat{A}_1 = \alpha \Rightarrow \widehat{A'C} = 2\alpha \xrightarrow{\text{قطر است } AA'} \widehat{AC} = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{E}_2 \xrightarrow{\text{عکس موازی و مورب}} EF \parallel BC$$

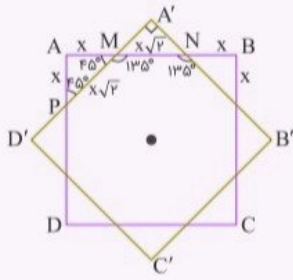


$$AC = AB = AD = 3$$

$$\alpha + \beta = 15^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 30^\circ$$

$$d'S_{ACD} = \frac{1}{2} \times AC \times AD \times \sin(\underbrace{2(\alpha + \beta)}_{30^\circ})$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2.25$$



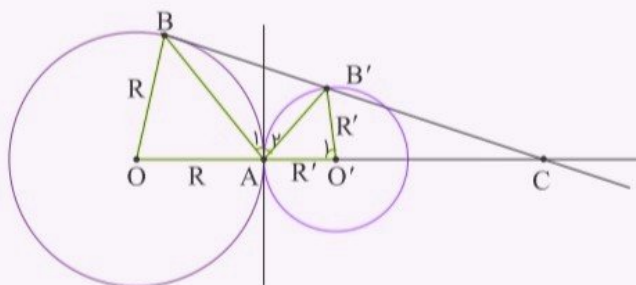
$$S_{\text{ناحیه مشترک}} = S_{ABCD} - 4 \times S_{\triangle AMN}$$

$$AM = AN = x \quad \left(\triangle A'MN \simeq \triangle AMP \text{ زیرا} \right)$$

$$AB = 2 \Rightarrow x + x\sqrt{2} + x = 2 \Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ناحیه مشترک}} = 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (2 - \sqrt{2})^2 = 4(2\sqrt{2} - 2) = 8(\sqrt{2} - 1)$$

محل برخورد امتدادهای BB' و خط‌المركزين را C نامیده و مماس مشترک داخلی را رسم می‌کنیم. حال داریم:



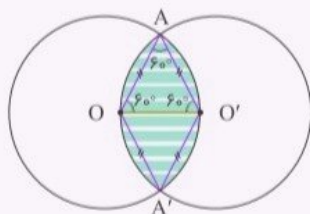
$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{1}{r} \widehat{AB} \\ \hat{O} &= \widehat{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O} = r \hat{A}_1$$

$$\Rightarrow \hat{O}' = r \hat{A}_2 \quad \text{با روش مشابه}$$

$$\Rightarrow \hat{O} + \hat{O}' = r (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = r \times 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow O'B' \parallel OB$$

$$\begin{aligned} \triangle COB : O'B' \parallel OB &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CO'}{CO} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{CO'}{CO - CO'} = \frac{R'}{R - R'} \\ \Rightarrow \frac{CO'}{R + R'} &= \frac{R'}{R - R'} \Rightarrow CO' = \frac{R(R + R')}{R - R'} = \text{مقدار ثابت} \end{aligned}$$

پس امتداد پاره خط BB' همواره از نقطه ثابت C می‌گذرد.



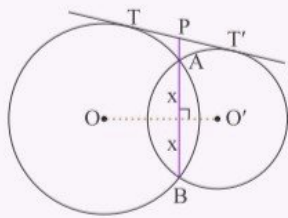
$$S_{\text{مشترک}} = S_{\triangle OO'A} + S_{\triangle OO'A'} + r (S_{\text{قطاع } OO'A} - S_{\triangle OO'A'})$$

$$S_{\text{قطاع } OO'A} = \frac{1}{6} S_{\text{دایره}} = \frac{1}{6} \times \pi \times r^2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$S_{\triangle OO'A} = S_{\triangle OO'A'} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مشترک}} = \sqrt{3} + \sqrt{3} + r \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

مثلث‌های $OO'A$ و $OO'A'$ متساوی‌الاضلاع هستند زیرا $OA = OA' = OO' = r$. در نتیجه $\hat{O}_1 = 60^\circ$ و مساحت قطاع $OO'A$ ، $\frac{1}{6}$ مساحت دایره خواهد بود.

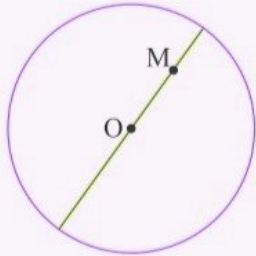


$$S_{AOBO'} = 72 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 16 \times 2x = 72 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

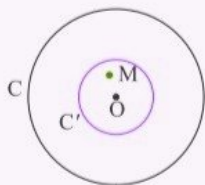
$$\left. \begin{array}{l} PT^2 = PA \times PB \\ PT'^2 = PA \times PB \end{array} \right\} \Rightarrow PT^2 = PT'^2 \Rightarrow \begin{cases} PT = PT' \\ TT' = 12 \end{cases} \Rightarrow PT = PT' = 6$$

$$PT^2 = PA(PA + 9) \Rightarrow PA^2 + 9PA - 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} PA = -12 \text{ غ.ق.} \\ PA = 3 \checkmark \end{cases}$$

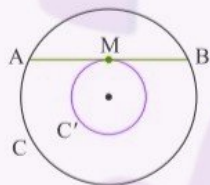
اولاً اگر $L = 2R$ ، وتر موردنظر یک قطر از دایره است و در این حالت، مسئله فقط یک جواب دارد:



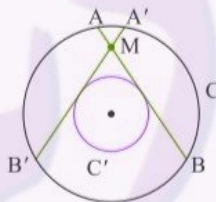
حال فرض کنیم $0 < L < 2R$. می‌دانیم کلیه وترهایی به طول L از دایره $C(O, R)$ بر دایره $C'(O, \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}})$ مماس‌اند و برعکس. بنابراین دایره C' را رسم و از M بر آن مماس می‌کنیم که وضعیت‌های زیر را داریم:



M درون دایره C' است.
فاقد جواب



M روی دایره C' است.
یک جواب (AB)

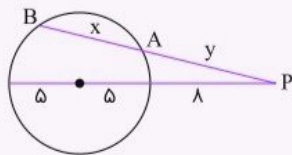
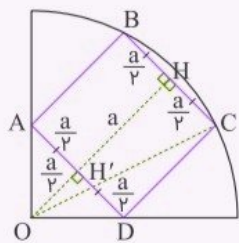


M خارج دایره C' است.
دو جواب $(A'B', AB)$

طول ضلع مربع را a فرض کرده و از O بر BC عمود می‌کنیم. پس OH عمود منصف BC است و چون $ABCD$ مربع است، OH عمود منصف AD هم می‌باشد، در نتیجه $OA = OD$ و مثلث OAD قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. بنابراین OH' نیمساز $\angle AOD$ هم بوده و $\angle AOH' = \angle H'OD = 45^\circ$. پس مثلث $OH'D$ هم قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و $OH' = H'D = \frac{a}{2}$. حال با رسم شعاع OC ، داریم:

$$\triangle OHC : \text{فیثاغورس} \Rightarrow OH^2 + HC^2 = OC^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \frac{10}{4}a^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{5}R^2 \Rightarrow a = R\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{R\sqrt{10}}{5}$$



$$PA - AB = \gamma$$

$$y - x = \nu \Rightarrow y = \nu + x$$

$$y(y+x) = \lambda(1\lambda) \Rightarrow (y+x)(y+x+x) = \lambda \times 1\lambda$$

$$\Rightarrow (\nu + x)\nu(1 + x) = \lambda \times 1\lambda$$

$$\Rightarrow x^r + w_X - Y_0 = 0$$

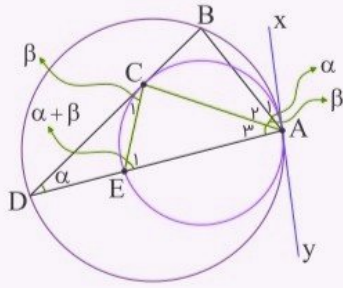
$$\Rightarrow (x - 7)(x + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -10 \text{ غير قابل قبول} \end{cases}$$

ابتدا دایره C را در راستای برداری به موازات d و به طول ℓ انتقال می‌دهیم.

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\ell}$$

نقطه B روی دایره C' اگر به اندازه \overrightarrow{OM} به حالت قبل برگردد، به نقطه A می‌رسیم. جواب مسئله AB است.

۱- محل برخورد دایره کوچک با AD را E نامیده و مماس مشترک خارجی دایره‌ها را رسم می‌کنیم. حال با فرض $\hat{A}_1 = \alpha$ و $\hat{A}_2 = \beta$ داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{D} &= \frac{1}{r} \widehat{AB} \\ \hat{A}_1 &= \frac{1}{r} \widehat{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = \hat{A}_1 = \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_1 &= \frac{1}{r} \widehat{AC} \\ x\hat{A}C &= \frac{1}{r} \widehat{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = x\hat{A}C = \alpha + \beta$$

است $\hat{E}_1 \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}_1 + \hat{D} \Rightarrow \alpha + \beta = \hat{C}_1 + \alpha \Rightarrow \hat{C}_1 = \beta$ زاویه خارجی \hat{E}_1 \hat{C}_1

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_3 &= \frac{1}{r} \widehat{CE} \\ \hat{C}_1 &= \frac{1}{r} \widehat{CE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{C}_1 = \beta \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_2 \Rightarrow \text{AC نیمساز } \hat{BAD} \text{ است}$$

۲-

مماس مشترک خارجی دو دایره را رسم کرده و فرض می‌کنیم $\hat{A}_1 = \alpha$ و $\hat{A}_2 = \beta$ حال داریم:

شکل

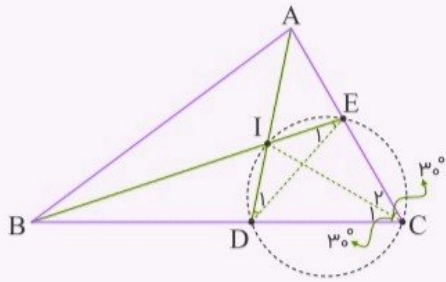
$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= \frac{1}{r} \widehat{AD} \\ x\hat{A}D &= \frac{1}{r} \widehat{AD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = x\hat{A}D = \alpha + \beta$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{C} &= \frac{1}{r} \widehat{AB} \\ \hat{A}_1 &= \frac{1}{r} \widehat{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_1 = \alpha$$

است $\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} + \hat{A}_3 \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + \hat{A}_3$ زاویه خارجی \hat{D}_1 \hat{A}_3

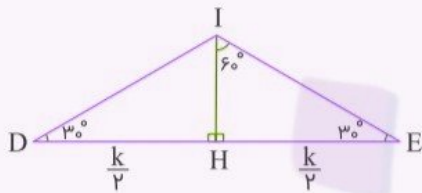
$$\Rightarrow \hat{A}_3 = \beta \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_2$$

می‌دانیم زاویه بین نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و B برابر است با $\hat{DIE} = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}$. حال چون چهار ضلعی CDIE محاطی است، داریم:



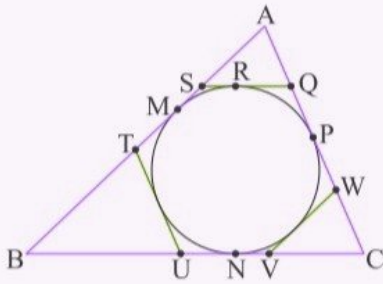
$$\hat{DIE} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \left(90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}\right) + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2}\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{DIE} = 120^\circ$$

از طرف دیگر، CI نیمساز \hat{C} است (چرا؟)، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 30^\circ$ و چون زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان، برابرند، بنابراین مثلث IDE متساوی‌الساقین است و با رسم ارتفاع IH، داریم: $\hat{E}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ$ و $\hat{D}_1 = \hat{C}_2 = 30^\circ$



$$DH = HE = \frac{k}{2}, \hat{HIE} = 60^\circ \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{3}}{2}IE \Rightarrow IE = \frac{2}{\sqrt{3}}HE = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ID = \frac{k\sqrt{3}}{3}$$

می‌دانیم طول مماس‌هایی که از یک نقطه بر یک دایره رسم می‌شوند، یکسان است. حال مطابق شکل، داریم:



$$SM = SR, QP = QR \quad (*)$$

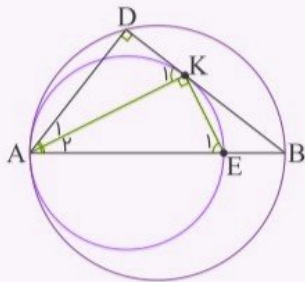
$$\begin{aligned} \Delta \text{ محیط } (ASQ) &= AS + SQ + AQ = AS + SR + RQ + AQ \\ &= \underbrace{AS + SM}_{AM} + \underbrace{QP + AQ}_{AP} \Rightarrow \Delta \text{ محیط } (ASQ) = AM + AP \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \text{ محیط } (BTU) = BM + BN \quad \text{به روش مشابه}$$

$$\Delta \text{ محیط } (CVW) = CP + CN$$

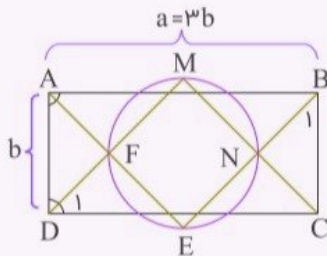
$$\begin{aligned} \Delta \text{ محیط } (ASQ) + \Delta \text{ محیط } (BTU) + \Delta \text{ محیط } (CVW) \\ &= AM + AP + BM + BN + CP + CN \\ &= (AM + BM) + (AP + CP) + (BN + CN) = AB + AC + BC \end{aligned}$$

محل برخورد AB با دایره کوچک‌تر را E می‌نامیم. می‌دانیم مرکزها و نقطه تماس دو دایره مماس، روی یک خط قرار دارند. پس AE قطر دایره کوچک‌تر است، در نتیجه زاویه‌های ADB و AKE محاطی روبه‌رو به قطرند، بنابراین قائمه‌اند. حال داریم:



$$\begin{cases} \hat{K}_1 \text{ ظلی است} \Rightarrow \hat{K}_1 = \frac{1}{2} \widehat{AK} \\ \hat{E}_1 \text{ محاطی است} \Rightarrow \hat{E}_1 = \frac{1}{2} \widehat{AK} \end{cases} \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{E}_1 \quad (*)$$

$$\begin{cases} \Delta \text{ قائم‌الزاویه است } ADK \Rightarrow \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{K}_1 \\ \Delta \text{ قائم‌الزاویه است } AKE \Rightarrow \hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{E}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow AK \text{ نیمساز } \angle DAB$$



از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل به طول a و عرض b ، مربعی به ضلع $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ ایجاد می‌شود، زیرا در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه 45° مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است، پس:

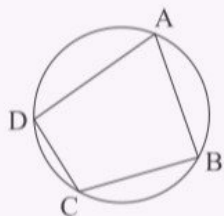
$$\begin{cases} \triangle DMC : \hat{D}_1 = 45^\circ \Rightarrow MC = \frac{\sqrt{2}}{2} DC \\ \triangle BNC : \hat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow NC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow MN = MC - NC = \frac{\sqrt{2}}{2} DC - \frac{\sqrt{2}}{2} BC \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2} (DC - BC)$$

طول قطر مربع ایجادشده برابر قدرمطلق تفاضل طول و عرض مستطیل است. در نتیجه قطر دایره محیطی این مربع نیز همان قدرمطلق تفاضل طول و عرض مستطیل خواهد بود، یعنی $2r = |a - b|$. بنابراین داریم:

$$2r = \left| \underbrace{a}_{3b} - b \right| = 2b \Rightarrow r = b \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi b^2$$

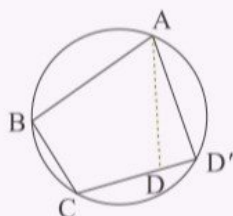
$$S_{\text{مستطیل}} = a \times b = 3b \times b = 3b^2 \Rightarrow \frac{S_{\text{دایره}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\pi b^2}{3b^2} = \frac{\pi}{3}$$



$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{ADC}}{\gamma} + \frac{\widehat{ABC}}{\gamma} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{136^\circ}{\gamma} = 18^\circ$$

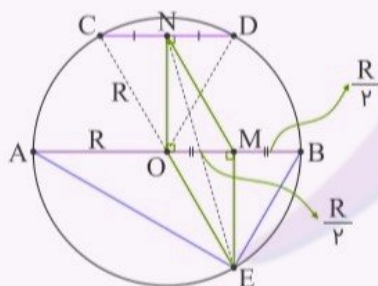
به روش مشابه ثابت می‌شود $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.

عکس قضیه: فرض کنیم در چهارضلعی ABCD، هر دو زاویهٔ روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند. یعنی (۱) $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و (۲) $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$. بر سه نقطهٔ A، B و C یک دایره می‌گذرد، ثابت می‌کنیم که این دایره از نقطهٔ D نیز می‌گذرد.



اثبات (برهان خلف): اگر این دایره از رأس D نگذرد، نقطه برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی $ABCD'$ محاطی است، بنابراین: (۳) $\hat{B} + \hat{D}' = 180^\circ$ از رابطه (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که (۴) $\hat{D} = \hat{D}'$ چون زاویه D زاویه خارجی مثلث ADD' است، بنابراین: (۵) $\hat{D} > \hat{D}'$ که رابطه (۵) با رابطه (۴) در تناقض است. در نتیجه فرض ما که دایره از رأس D نمی‌گذرد نادرست و حکم قضیه برقرار است.

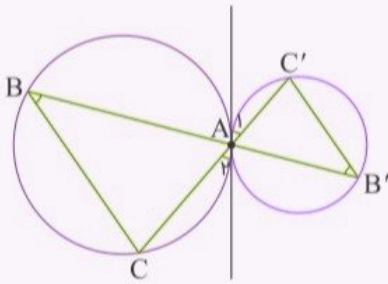
طول شعاع دایره را R فرض می‌کنیم. طبق فرض، مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است، پس ON ارتفاع این مثلث هم می‌باشد، در نتیجه $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ و چون $AB \parallel CD$ ، ON بر AB هم عمود است. زاویه AEB محاطی و روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است و EM ، ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه AEB است. حال طبق روابط طولی در این مثلث، داریم:



$$EM^r = AM.MB \Rightarrow EM^r = \left(\frac{r}{r} R \right) \left(\frac{R}{r} \right) \Rightarrow EM = \frac{\sqrt{r}}{r} R$$

پس ON و EM موازی و مساوی‌اند و در نتیجه چهار ضلعی NOEM متوازی‌الاضلاع است، بنابراین قطرهای آن، یعنی OM و NE یکدیگر را نصف می‌کنند.

مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم پس زاویه‌های \hat{A}_1 و \hat{A}_2 ظلی و با هم برابرند. حال داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{1}{2} \widehat{AC'} \\ \hat{B}' &= \frac{1}{2} \widehat{AC'} \\ \hat{A}_2 &= \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} \widehat{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}' \quad \left. \begin{aligned} \hat{A}_2 &= \hat{B} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{B} = \hat{B}' \xrightarrow{\text{عکس موازی - مورب}} BC \parallel B'C'$$

در حل این سوال به دو نکته توجه می‌کنیم:

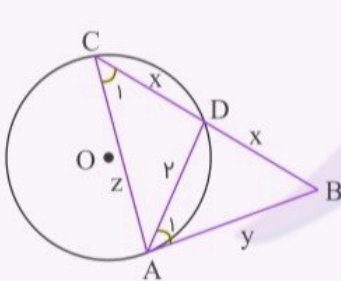
نکته اول: نسبت مساحت دو n ضلعی منتظم، مربع نسبت اضلاع آن‌هاست.

نکته دوم: دو رابطه زیر برای محاسبه طول اضلاع هشت ضلعی منتظم محاطی و محیطی برقرار است:

$$l_1 = 2r \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \xrightarrow{n=8} l_1 = 2r \tan 22.5^\circ \quad (\text{طول چندضلعی منتظم محیطی})$$

$$l_2 = 2r \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \xrightarrow{n=8} l_2 = 2r \sin 22.5^\circ \quad (\text{طول چندضلعی منتظم محاطی})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{S}{S'} &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{2r \tan 22.5^\circ}{2r \sin 22.5^\circ}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 22.5^\circ} \\ &= \frac{1}{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{S}{S'} = 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 \text{ ظلی} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \hat{C}_1 \text{ محاطی} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{C}_1 \\ \hat{B} &= \hat{B} \text{ مشترک} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز.}} \triangle ABD \sim \triangle CBA$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{y}{2x} = \frac{x}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x \times 2x \Rightarrow y = \sqrt{2}x$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{2}{z} \Rightarrow z = 2\sqrt{2}$$